第 11 講　絶対値付き積分

11　次の各問いに答えよ．

（1）$f(x)=\int_0^x |t(t-x^2)|dt$ とする．$f(x)$ を求めよ．

（2）$g(x)=\int_0^1 |xt-1|dt$ とする．$g(x)$ を求めよ．

（3）$h(x)=\left|x^2-\int_0^1 h(t)dt\right|$ を満たす関数 $h(x)$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　絶対値付き積分

11　$f(t)=\int_0^1|x^2-2tx|dx$ とおくとき, $f(t)$ の最小値と, 最小値を与える t の値を求めよ.

【選択肢】

㋐　$t=0$, 最小値 $\frac{1}{3}$　　㋑　$t=\frac{1}{4}$, 最小値 $\frac{1}{8}$　　㋒　$t=\frac{\sqrt{2}}{4}$, 最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　絶対値付き積分

11　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=\int_0^x |t(t-x^2)|dt$ とする．$f(x)$ を求めよ．

(2)　$g(x)=\int_0^1 |xt-1|dt$ とする．$g(x)$ を求めよ．

(3)　$h(x)=\left|x^2-\int_0^1 h(t)dt\right|$ を満たす関数 $h(x)$ を求めよ．

【答】　(1) $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3 & (x\leqq 0) \\ \frac{1}{3}x^6-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3 & (0<x<1) \\ \frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3 & (x\geqq 1) \end{cases}$　(2) $g(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x+1 & (x\leqq 1) \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{x}-1 & (x>1) \end{cases}$

(3) $h(x)=\left|x^2-\frac{1}{4}\right|$

【解答】

(1)　(Ⅰ)　$x\leqq 0$ のとき

$$f(x)=\int_0^x (t^2-x^2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{x^2}{2}t^2\right]_0^x=-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3$$

(Ⅱ)　$0<x<1$ のとき

$$f(x)=\int_0^{x^2}(-t^2+x^2t)dt+\int_{x^2}^x (t^2-x^2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{x^2}{2}t^2\right]_0^{x^2}+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{x^2}{2}t^2\right]_{x^2}^x=\frac{1}{3}x^6-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3$$

(Ⅲ)　$x\geqq 1$ のとき

$$f(x)=\int_0^x (-t^2+x^2t)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{x^2}{2}t^2\right]_0^x=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3$$

以上より，$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3 & (x\leqq 0) \\ \frac{1}{3}x^6-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3 & (0<x<1) \\ \frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3 & (x\geqq 1) \end{cases}}$

(2)　(Ⅰ)　$x\leqq 1$ のとき

$$g(x)=\int_0^1 (-xt+1)dt=\left[-\frac{x}{2}t^2+t\right]_0^1=-\frac{1}{2}x+1$$

(Ⅱ)　$x>1$ のとき

$$g(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}(-xt+1)dt+\int_{\frac{1}{x}}^1 (xt-1)dt$$

$$=\left[-\frac{x}{2}t^2+t\right]_0^{\frac{1}{x}}+\left[\frac{x}{2}t^2-t\right]_{\frac{1}{x}}^1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}-1$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より，$\boldsymbol{g(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+1 & (x\leqq 1) \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}-1 & (x>1) \end{cases}}$

(3)　$h(x)\geqq 0$ より，0 以上の定数 k を用いて $k=\displaystyle\int_0^1 h(t)dt$ とおけるので，$h(x)=|x^2-k|$ と表せる．

(Ⅰ)　$\sqrt{k}<1$ のとき，つまり $0\leqq k<1$ のとき

$$k=\int_0^{\sqrt{k}}(-t^2+k)dt+\int_{\sqrt{k}}^1(t^2-k)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+kt\right]_0^{\sqrt{k}}+\left[\frac{1}{3}t^3-kt\right]_{\sqrt{k}}^1$$

$$=\frac{4}{3}k\sqrt{k}-k+\frac{1}{3}$$

となるので，これを整理すると $(2\sqrt{k}-1)(2k-2\sqrt{k}-1)=0$

$0\leqq k<1$ より $k=\dfrac{1}{4}$

(Ⅱ)　$\sqrt{k}\geqq 1$ のとき，つまり $k\geqq 1$ のとき

$$k=\int_0^1(-t^2+k)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+kt\right]_0^1=-\frac{1}{3}+k$$

となるが，これを満たす k は存在しない．

以上より，$\boldsymbol{h(x)=\left|x^2-\dfrac{1}{4}\right|}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　絶対値付き積分

11　$f(t)=\int_0^1|x^2-2tx|dx$ とおくとき, $f(t)$ の最小値と, 最小値を与える t の値を求めよ.

【選択肢】

㋐　$t=0$, 最小値 $\frac{1}{3}$　　㋑　$t=\frac{1}{4}$, 最小値 $\frac{1}{8}$　　㋒　$t=\frac{\sqrt{2}}{4}$, 最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

【答】　㋒

【解答】

(Ⅰ)　$t\leqq 0$ のとき

$$f(t)=\int_0^1(x^2-2tx)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2\right]_0^1$$
$$=-t+\frac{1}{3}$$

(Ⅱ)　$0<t<\frac{1}{2}$ のとき

$$f(t)=\int_0^{2t}\{-(x^2-2tx)\}dx+\int_{2t}^1(x^2-2tx)dx$$
$$=\frac{1}{6}(2t-0)^3+\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2\right]_{2t}^1$$
$$=\frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3}$$

(Ⅲ)　$t\geqq\frac{1}{2}$ のとき

$$f(t)=\int_0^1\{-(x^2-2tx)\}dx$$
$$=t-\frac{1}{3}\qquad\text{((Ⅰ)より)}$$

ここで

$$\left(\frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3}\right)'=8t^2-1$$

であるから, (Ⅰ)〜(Ⅲ)より $f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	-1		$-$	0	$+$		1
$f(t)$	↘		↘	最小	↗		↗

となるので, 最小値は

$$\boldsymbol{t=\frac{\sqrt{2}}{4}}\text{ のとき}\quad f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{2}}{6}}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。